成分型単純群の分類完成 (有限群論とその周辺)

鈴木, 寛

数理解析研究所講究録
424巻 1981年 75-89

成分型単純群の分類完成

大阪教育大学　鈴木寛

これは、成分型有限単純群の分類完成の報告、そのいくつかの部分の紹介、証明技術面での問題についてのノートである。

§1. 主定理と標準部分群型問題

このノートで、群はすべて有限群、単純群は、非可換単純群を意味するものとし、用いる記号、用語はなるべく、鈴木通夫著"群論(上・下)"(岩波書店)、近藤武著"群論(I, II, III)"(岩波基礎数学講座)にあわせる事とした。上記二名著を御参照されたい。

定義 1.　$\mathcal{K}$：既知単純群全体の集合

$F^*(G)$：有限群 G の一般フィッティング部分群

($F^*(G) = E(G)F(G)$、ここで $F(G)$ はフィッティング部分群、$E(G)$ は、Gの、準単純(後述)連正規部分群全体で生成された G の部分群)

主定理. G を $\mathfrak{X}$ に入らない、最小位数の単純群とする。すると、任意の位数2の元 t について、

$$F^*(C_G(t)/O(C_G(t)))$$

は、2-群。

注1. 一般に、ある位数2の元 t について、$F^*(C_G(t)/O(C_G(t)))$ が2群にならない群を、成分型(component type)の群という。今 $\mathfrak{X}$ が、単純群全体である事を証明しようとする時、G を、その最小位数の反例であるとすると、上の定理は、Gが、成分型ではないと主張している。

注2. $F^*(C_G(t)/O(C_G(t)))$ が2-群にならないという事は、$C_G(t)/O(C_G(t))$ に、連正規な、準単純部分群がある事を意味し、(定義1 参照)、成分型とは、大体、ある位数2の元の中心化群の下の方に、単純群がある群のことである。

以後、主定理の証明について述べる。

定義2. G の部分群 L が、標準部分群で（standard subgroup）あるとは、次の三つの条件をみたすことである。

① $L=L'$, $L/Z(L)$ は単純群。（この性質をもつ群 L を 準単純 と呼ぶ）

② $K=C(L)$ とおくとき、$|K|$ は 偶数であるが、任意の $g\in G-N(K)$ について $|K\cap K^g|$ は 2で割れない。（このとき、K は tightly embedded subgroup であると呼ばれる。）

③ $N(L)=N(K)$, $[L, L^g]\neq 1$, $\forall g\in G$。

定義3. G が 単純型 X であるとは、G が、標準部分群 L を持ち、$L/Z(L)\cong X$ なることである。

定義4. G が 型 X であるとは、G が 標準部分群 $L\cong X$ を 持つことである。

定理1. （標準部分群型定理） G が、単純型 X $(X\in\underline{\mathcal{K}})$ であって、$F^*(G)$ が、単純群であるなら、$F^*(G)\in\underline{\mathcal{K}}$。すなわち、ある $H\in\underline{\mathcal{K}}$ で、$H\leq G\leq \mathrm{Aut}\,H$。

定理2.（M. Aschbacher, R. Foote）主定理は、定理1. より、みちびかれる。

したがって、目標は、定理1を、証明することになった。

注3. 定理1. において G が単純と仮定し、かつ、定理2. が成立すればよいが、定理2. の証明に用いられる U－予想、B－予想（これらも、定理1. からみちびかれる "定理" である）をも、一度にかたづける為には、G を、もう少し一般に、つまり、$F^*(G)$ が、単純、と仮定して証明する必要がある。ただし、すべての型 X について、この強い形で、定理1. を証明しなくては、いけないわけではない。

注4. 定義2. からわかるように、標準部分群を持つ群は、成分型である。

定理1. を証明するためには、$\underline{\mathcal{X}}$ の各元 X について、次を証明すればよい。

定理1′ G を、単純型 X とし、$F^*(G)$ は単純とする。さらに G は、次の条件をみたすものとする。

① G の真部分群の剰余群 H が、ある $Y \in \underline{\mathcal{K}}$ について単純 Y 型なら、H の任意の組成因子は $\underline{\mathcal{K}}$ の元であるか、または、可換群である。

② L を、X 型の標準部分群としたとき、$C(L)$ の 2－シロー群は、巡回群である。

③ G は、性質 $B(G)$ をみたす。

（④ G は、単純群である。）

このとき、$F^*(G) \in \underline{\mathcal{K}}$。

注5. ① は、定理 1. で、最小位数の反例をとることから、仮定できるもの、② は、$C(L)$ の 2－シロー群が巡回群でない場合が、一般に、M. Aschbacher, G. Seitz によって証明されたため、③ は、G の位数 2 の元の中心化群の奇数位数の正規部分群に関する性質であるが、詳述はさける。④ は、いつでも、仮定できるわけではなく、例えば、標数 2 の体上のシバリー群のほとんどの場合に、仮定できる。（注3. 参照）

§2. 個々の単純型における定理 1′. の証明.

定理 1′. の証明には、実に多くの数学者が携わってきたが

その一部を列挙すると、

- 階数の大きな奇標数のシバリー群　　J. Walter
- 階数の大きな標数２のシバリー群　　G. Seitz
- 交代群　　R. Solomon，　M. Harris
- 散在型　　R. Solomon，L. Finkelstein　et al.
- 階数の小さな標数２のシバリー群
  五味・山田・宮本　et al.

以下は、１９７９年夏、カリフォルニア大学サンタクルツ校で開かれたシンポジウム当時、残されていた（プレプリント以上のものがなかったもの）型と、それを証明した（その型の場合に、定理１′を証明した）人の名である。

Ｉ．　標数２のシバリー群

$L_3(4)$	Aschbacher, Seitz.
$\widehat{U_6}(2)$	Hunt ?
$\widehat{\Omega_8^+}(2)$	江川
$^2\widehat{E}_6(2)$	Stroth
$F_4(2)$	Seitz ?
$^2F_4(2)'$	Aschbacher
$^2F_4(2^{2n+1})$	宮本
$G_2(4)$	Aschbacher, Seitz
$\Omega_8^-(2)$	Alward

II. 奇標数のシバリー群

$U_3(3)$	Harris
$L_4(3)$	鈴木(寛)
$U_4(3)$	Aschbacher
$G_2(3)$	山田

III. 散在型

$\hat{F}_2$	Griess ?
F_3	Syskin
$\hat{M}(22)$	江川

注6. 上の表で、疑問符のついているものは、筆者が確認できなかったもので、その他にも、$\Omega_6^-(3)$, $P\Omega_7(3)$, $P\Omega_8^{\pm}(3)$ は、証明した人の名を確認できなかったが、現時点では、すべて、証明されているとの事である。(Gorenstein よりの、間接的情報による。)

§3. 定理1′の証明とその方針

定理1′の証明のあらすじを考える。

L を、X 型の標準部分群とする。C(L) は、L が、標準部分群であることにより、定義2. の条件 ② をみたす。

従って、特に、$C(L)$ の 2－シロー群 R は、単位群ではなく、定理1′の仮定 ② により、巡回群としてよい。t を R の位数2の元とすると、定義2. の条件 ③ と、R が $C(L)$ のシロー群で、巡回群であることから、$C(t) \leq N(L)$ が、みちびかれる。これにより、$F^*(C(t)/O(C(t))) \cong R * L$ が得られ、$C(t)/O(C(t))$ の構造を知ることができる。

次に、$C(t)$ の性質から G の性質を調べ、$F^*(G)$ が何であるかを決めるのであるが、$F^*(G)$ が単純 という条件は、実際には用いにくいので、普通 $O(G)=1$、つまり、奇数位数の G の正規部分群は単位群に限るとのみ仮定し（これも省くこともあるが、この仮定は、全くテクニカルな仮定である） 証明をすすめる。この場合、$F^*(G)$ が、単純群となる場合の他に、$t \in Z(G)$ で、$L = E(G)$ なる場合と、$F^*(G) \cong L \times L$ となる二つの場合が起こる。前者は、Z^*-定理、後者は、product fusion なるものを調べて扱うことが多いが、特に、後者を扱うのが、定理1′の証明が一般に長くなる一つの原因である。

$C_G(t)$ の、どの性質に注目するかは、いつも問題であるが、最終的に、$F^*(G)$ を決定しやすい情報を見つけ出すとしか言えないようである。

<table>
<tr><td>L</td><td>$\Omega_8^+(2)$</td><td>${}^2F_4(2^{2n+1})$</td><td>${}^2F_4(2)'$</td></tr>
<tr><td></td><td>（江川）</td><td>（宮本）</td><td>（Aschbacher）</td></tr>
<tr><td rowspan="2">E(G)</td><td rowspan="2">L
L × L
$\Omega_8^+(4)$
M(22)</td><td>L
L × L
$F_4(2^{2n+1})$</td><td>L
L × L
$F_4(2)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">現在は $G \neq O^2(G)$ まで</td></tr>
</table>

上の表は、標数2型の場合のいくつかの例であるが、E(G) として現われるのもほとんど、標数2型のシバリー群であるため L の、したがって C(t) の、放物型部分群 H_i 達を考え、その $O_2(H_i)$ の正規化群を調べて、G の放物型部分群 H_i を得、H_i 同志の関係から G の (B, N)-対を構成する方法が、しばしば用いられるようである。

奇標数のシバリー群の場合も、E(G) として得られるものは、殆ど、奇標数のシバリー群であるが、放物型部分群が、2-局所部分群（2-群の正規化群）ではないので、今のところ、これを扱う方法は得られていない。これに対して、G の classical involution と呼ばれる位数2の元（t とは異なる）に目をつけ、その中心化群を求めて、G を決定する方法は、一般的に用いることの可能な方法である。

次の二つは、この方法に関係した定理である。

定義5. $\mathfrak{M}$ を、次の様な群全体の集合とする。すなわち、$H/O(H) \cong SL(2,3)$ であるか、または、$H=H'$, $H/Z^*(H)$ は、奇数標数の単純シバリー群で $Z^*(H)$ は偶数位数を持ち、$H/Z^*(H) \cong PSL(2n, p^r)$, $PSU(2n, p^r)$ なる場合は、更に、$|Z^*(H)|_2 = |M(H/Z^*(H))|_2$ であるとする。ここで $M(H/Z^*(H))$ は、$H/Z^*(H)$ の シュアーマルティプライアーをあらわすものとする。

定理3. z を単純群 G の位数2の元とし、$C_G(z)$ は連正規な、$\mathfrak{M}$ に属する部分群で、z を含むものをもつとする。この時、G は、奇標数のシバリー群か、または M_{11} に同型である。

定理4. $W=\{1, z_1, z_2, z_3\} \cong E_4$ を 群 G の部分群とする。もし、$C_G(W)$ が、連正規な、$\mathfrak{M}$ に属する部分群 L_1, L_2 で、$z_1 \in L_1$, $z_2 \in L_2$ なるものをもてば、G は、単純群ではない。

注7. 上の二つの定理は次の論文による。

M. E. Harris, Finite groups containing an intrinsic 2-component of Chevalley type over a field of odd order, to appear.

注8. 定理3. は Aschbacher による Classical involution による、奇標数シバリー群の特徴づけの拡張である。

注9. 定理4. は 定理3. の系で、$E(G) \cong L \times L$ なる場合に、有効である。

§4. 型 $L_4(3)$ の場合

この節では、実際に、型 $L_4(3)$ の場合、$E(G)$ 従って $F^*(G)$ としてどんな群があらわれ、また、具体的に証明に用いられる部分群は、どんなものであるかを述べる。記号は前節のものをそのまま用いる。

$\lvert R\rvert > 2$ の場合	二次形式	t	$\mathfrak{M}$の元
$P\Omega_8^-(3)$	$\begin{bmatrix}1&&&&&&&\\&1&&&&&&\\&&1&&&&&\\&&&1&&&&\\&&&&1&&&\\&&&&&1&&\\&&&&&&1&\\&&&&&&&-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1&&&&&&&\\&-1&&&&&&\\&&1&&&&&\\&&&1&&&&\\&&&&1&&&\\&&&&&1&&\\&&&&&&1&\\&&&&&&&1\end{bmatrix}$	$SL(2,3)$

$\lvert R \rvert = 2$ の場合	二次形式	τ	$\mathfrak{M}$ の元
$L_4(9)$		体同型	$SL(2,9)$
$L_6(3)$		$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$ × グラフ同型	$SL(2,3)$ $SL(4,3)$
$U_6(3)$		体同型	$SL(2,3)$, $SU(4,3)$
$P\Omega_7(3)$	$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$	$SL(2,3)$
$P\Omega_8^+(3)$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$	$SL(2,3)$
$PSp_8(3)$	$\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$	$SL(2,3)$ $Sp(4,3)$

上の表の第一列は，L，$L \times L$ 以外で，$E(G)$ としてあらわれる群．第二・三列は，おのおのの場合，τ として何をとるかであり，最終列は，定理3．を用いる場合，適用できる 連正規な部分群としてあらわれるもの，波線をつけたものは，実際に，証明に用いた群である。$P\Omega_7(3)$ については，G' の 2－シロー群が，A_{12}－型であり，$G' = E(G)$ をシロー群による特徴づけを用いて得た。

上の表の様に多くの群があらわれるのは，次の同型によるものであろう。　$L_4(3) \cong P\Omega_6^+(3)$．

注10。　上の表にあらわれた群は、すべて、その自己同型群が、単純型 $U_4(3)$ でもある。

IN $C_G(t)$	IN G	IN $E(G)$	$E(G)$
$\lvert R\rvert > 2$	$2^6\Sigma_8$	2^6A_8	$P\Omega_8^-(3)$
$\lvert R\rvert = 2$	$2^5\Sigma_5$	$2^4\Sigma_5$	$L_4(3)$
$m(C(t))=5$	$2^5\Sigma_6$	$2^4\Sigma_6$	$L_4(9)$, $L_6(3)$
$2^5\Sigma_5$	$2^5 2^4\Sigma_5$	$(2^4\Sigma_5)\times(2^4\Sigma_5)$	$L_4(3)\times L_4(3)$
$\lvert R\rvert = 2$	$2^6\Sigma_5$	$2^4\Sigma_5$	$L_4(3)$
$m(C(t))=6$	$2^6(Z_2\times\Sigma_5)$	2^6A_7	$P\Omega_7(3)$
$2^6\Sigma_5$	$2^6\Sigma_6$ (直既約)	$2^5\Sigma_6$	
	$2^6\Sigma_6$ (直可約)	$2^4\Sigma_6$	$L_4(9)$, $L_6(3)$
	$2^6(Z_2\times\Sigma_6)$	2^6A_8	$P\Omega_8^+(3)$
	$2^6 2^4\Sigma_5$	$(2\times4^4)\Sigma_6$	$U_6(3)$
		$(2^4\Sigma_5)\times(2^4\Sigma_5)$	$L_4(3)\times L_4(3)$
	$2^6 2^5\Sigma_5$	$(2\times4^4)\Sigma_6$	$U_6(3)$
		$(2^4\Sigma_5)\times(2^4\Sigma_5)$	$L_4(3)\times L_4(3)$

上の表は、G の 2-シロー群、さらに、$E(G)$ の 2-シロー群を得るのに用いられた 2-局所部分群の表である。

実際の証明には上記のフラットフォームと呼ばれる基本ア

ーベル群の正規化群の他に、カスプフォームと呼ばれるエクストラスペシャル型の2−群の正規化群（これが最終的に定理3. を適用できる位数2の元 z を中心に持つ）を考察する。まず、$C_G(t)$ の2−局所部分群（上の表 第一列の $2^4\Sigma_5$ や $2^6\Sigma_5$）をとり、その極大正規2−群の正規化群としておこる群の可能性を考えると、上の表 第二列の可能性がある事がわかり、それぞれに場合分けし、カスプフォームと見比べて 2−群の正規化群を順次とって、G の2−シロー群を得る。次に、$E(G)$（フュージョンシンプルの部分）の2-シロー群を、移送を用いて決める。殆どの場合 $t \notin E(G)$ である。最後に、$E(G)$ の2−シロー群の中で、共役関係を調べ、定理3. を適用できる位数2の元の中心化群を決定し $E(G)$ を得る。

以上が、証明の大体の筋道であるが、小さな部分での t の他の元との共役関係は本質的である。

§5. おわりに

単純群分類の最後はすべて、局所解析的手法によってなされたようである。証明の局所的改訂の価値には疑問も多いが、最後に、筆者の単純な疑問の形でいくつかの問題を記す。

1. 標準部分型問題において、どこまでアルゴリズム化できるか。

2. 定理1' の証明で、$B(G)$ どころか、U も仮定できるか、$O(C_G(t))=1$ なる時、表現論は適用可能か。

3. 一般に、$V\cdot A$、$V \cong E_{2^n}$、$C(V)=V$、$(VA)' \cap V \lneq V$ のような 2-局所部分群 VA を持つ群 G が、単純になる条件は何か。§4、の最後の表で、二列目の 2-局所部分群からすぐ $t \notin G'$ かどうかがわかれば、例えば定理1' の証明は 1/3 程度以下になるであろう。